УДК 532.546

А. А. Зайцев, И. К. Волянская

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ В СРЕДАХ С ОБЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ

Изучается структура фильтрационных течений в двумерных слоистых средах. Дано определение понятий течений положительного и отрицательного направлений. Получены соотношения для комплексных потенциалов в средах, имеющих общую границу. Они использованы для решения конкретных задач.

The structure of filtration flows in two-dimensional laying media is studied. The definition of positive and negative flows is giving. The relations for complex potentials in media with common boundary are receiving. There are employing for founded solutions some problems.

Ключевые слова: комплексный потенциал фильтрационного течения, положительные и отрицательные течения, отражение и прохождение, слоистые среды, фурье-представление.

Key words: complex potential of filtration flow, positive and negative flows, reflection and transaction, laying media, Fourier-representation.

При разработке газовых и нефтяных месторождений, при строительстве гидротехнических сооружений, при решении задач мелиорации и экологии большое значение имеет учет неоднородности сред. В природе встречаются различные типы таких неоднородностей: протяженные участки (сбросы), плоскости со свободной жидкостью (каверны) и т. д. Неоднородность природных пластов оказывает сильное влияние на процесс добычи газа и питьевой воды. Поэтому одна из актуальных проблем — изучение степени этого влияния [1—6]. Здесь значительную пользу приносит анализ математических моделей фильтрационных течений жидкости модельных задач. Они имеют определенную специфику, поэтому для их решения разработаны специальные методы. Основным из этих методов является метод изображения особых точек [1; 3; 6]. В работе [6] дано обобщение фильтрационной теоремы об окружности с помощью теории обобщенных функций и решена задача для трехкомпонентной среды.

Будем рассматривать течения в слоистых средах, свойства которых изменяются в направлении оси абсцисс. Таким образом, в направлении оси ординат среда будет однородной. Один из возможных способов решения задач о фильтрационных течениях в слоистых средах состоит в использовании преобразования Фурье по оси y (параметр преобразования обозначим ξ). В качестве примера приве-

© Зайцев А. А., Волянская И. К., 2013

дем решение задачи о течениях в однородной среде, создаваемых компактно расположенными источниками. Обозначим их плотность $\rho(x,y)$, тогда вещественный потенциал течения $\varphi = \varphi(x,y)$ подчиняется уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \rho(x,y). \tag{1}$$

Допустим, что носитель функции $\rho(x,y)$ содержится в промежутке $a < x < b$. Обозначим преобразование Фурье по переменной y функций $\varphi(x,y)$ и $\rho(x,y)$ символами $\overline{\varphi}(x,\xi)$ и $\overline{\rho}(x,\xi)$, то есть

$$\overline{\varphi}(x,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)exp(i\xi y)dy,\quad \overline{\rho}(x,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x,y)exp(i\xi y)dy.$$

Действуя на уравнение (1) преобразованием Фурье, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\overline{\varphi}$:

$$\frac{d^2\overline{\varphi}}{dx^2} - |\xi|^2\overline{\varphi} = \overline{\rho}.$$

Его решение ограничено на бесконечности и дается формулой

$$\overline{\varphi}(x,\xi) = -\frac{1}{2|\xi|}\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-|\xi||x - x_0|)\overline{\rho}(x_0,\xi)dx_0. \tag{2}$$

Ограничение на носитель функции $\rho(x,y)$ ведет к равенствам $\overline{\rho}(x_0,\xi) = 0$ при $x_0 < a$ и $x_0 > b$. Отсюда и из формулы (2) получаем

$$\overline{\varphi}(x,\xi) = A^-(\xi)\exp(|\xi|x),\ x < a,\quad \overline{\varphi}(x,\xi) = A^+(\xi)\exp(-|\xi|x),\ x > b, \tag{3}$$

где

$$A^-(\xi) = -\frac{1}{2|\xi|}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|\xi|x_0)\overline{\rho}(x_0,\xi)d\xi,$$

$$A^+(\xi) = -\frac{1}{2|\xi|}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(|\xi|x_0)\overline{\rho}(x_0,\xi)d\xi \tag{4}$$

(фактически в обоих интегралах интервалом интегрирования служит промежуток $a < x < b$).

Выполнив обратное преобразование Фурье, мы найдем значение потенциала всюду, в том числе в полуплоскостях $x < a$ и $x > b$. Соответствующее течение в полуплоскости $x > b$ естественно назвать положительным, а в полуплоскости $x < a$ — отрицательным. В дальнейшем выражения (3) будем называть Фурье—представлениями отрицательных и положительных течений.

Пусть границей двукомпонентной среды будет прямая $x = x_1$. Коэффициенты проницаемости в левой и правой однородных средах считаем равными k_1 и k_2 соответственно. Пусть в левой среде появляется положительное течение, комплексный потенциал которого есть $\Phi_1^+(z)$, когда оно достигает границы раздела, в этой среде возникает отраженное течение с потенциалом $\Phi_1^-(z)$. А в соседней — прошедшее течение с потенциалом $\Phi_2^+(z)$. Индексы внизу — номера сред, а знаки «+» и «—» указывают направление течения (рис. 1, *а*).

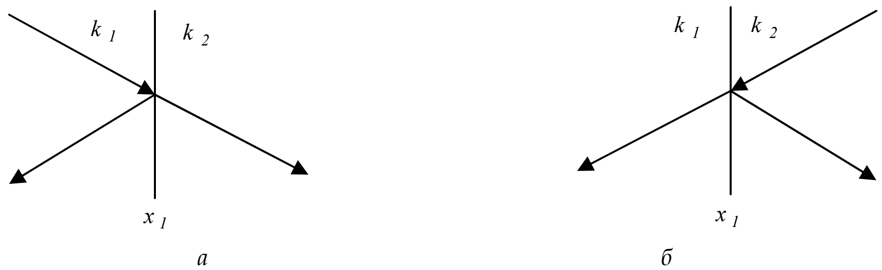

Рис. 1. Два случая набегания течения на границу раздела

Согласно теореме о прямой

$$\Phi_1^-(z) = v_{21}\overline{\Phi_1^+(s_1 z)},\ \Phi_2^+(z) = w_{21}\Phi_1^+(z), \tag{5}$$

где

$$s_1 z = -\overline{z} + 2x_1 \tag{6}$$

обозначает отражение от прямой $x = x_1$, а величины

$$v_{21} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},\ w_{21} = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} \tag{7}$$

являются коэффициентами отражения и прохождения слева направо.

Аналогичный анализ случая, когда на границу раздела набегает справа отрицательное течение, комплексный потенциал которого есть $\Phi_2^-(z)$, приводит к следующим формулам:

$$\Phi_1^-(z) = w_{12}\,\Phi_2^-(z),\ \Phi_2^+(z) = v_{12}\overline{\Phi_2^-(s_1 z)}, \tag{8}$$

где

$$v_{12} = -\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},\ w_{12} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tag{9}$$

будут коэффициентами отражения и прохождения справа налево.

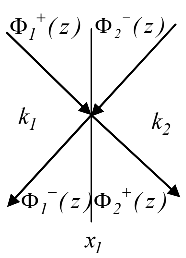

Рис. 2. Случай существования в каждой среде течений обоих направлений

Рассмотрим общую ситуацию, когда в каждой среде существуют течения обоих направлений (рис. 2).

Сопоставляя рисунки 1 и 2, делаем следующий вывод: роль набегающих течений выполняют течения с потенциалами $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^-(z)$.

Каждое из них порождает отраженное и проходящее течения. При этом отрицательное течение в среде k_1 — суперпозиция отраженного течения, порожденного течением $\Phi_1^+(z)$, и проходящего течения, порожденного течением $\Phi_2^-(z)$. Для положительного течения в среде k_2 ситуация аналогичная. Следовательно, в силу формул (5) и (8) справедливы следующие соотношения:

$$\Phi_1^-(z) = v_{21}\overline{\Phi_1^+(s_1 z)} + w_{12}\,\Phi_2^-(z),$$
$$\Phi_2^+(z) = w_{21}\Phi_1^+(z) + v_{12}\overline{\Phi_2^-(s_1 z)}. \tag{10}$$

Эти соотношения *универсальные*: они распространяются на случай многослойных сред (с естественными изменениями в индексации). Присутствие источников принципиально их не меняет.

В случае фильтрационных течений коэффициенты прохождения и отражения имеют простые связи. Из формул (7) и (9) находим

$$v_{12} = -v_1,\ w_{12} = 1 + v_1,\ v_{21} = v_1,\ w_{21} = 1 - v_1, \tag{11}$$

где
$$v_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}. \tag{12}$$

Благодаря равенствам (11) соотношения (10) записываются так:

$$\Phi_1^-(z) = v_1\overline{\Phi_1^+(s_1 z)} + (1 + v_1)\Phi_2^-(z),$$
$$\Phi_2^+(z) = (1 - v_1)\Phi_1^+(z) - v_1\overline{\Phi_2^-(s_1 z)}. \tag{13}$$

Заметим, что аналогичные соотношения имеют место для фурье-представлений вещественных потенциалов, а именно

$$\varphi_1^-(z) = v_1\overline{\varphi_1^+(s_1 z)} + (1 + v_1)\varphi_2^-(z),$$
$$\varphi_2^+(z) = (1 - v_1)\varphi_1^+(z) - v_1\overline{\varphi_2^-(s_1 z)}; \tag{14}$$

здесь в соответствии с формулами (3) и (4) имеют место следующие выражения:

$$\varphi_n^+(z) = A_n^+(\xi)\exp(-|\xi|x),$$
$$\varphi_n^-(z) = A_n^-(\xi)\exp(|\xi|x),\ n = 1, 2. \tag{15}$$

В качестве примера использования уравнений (13) получим решение известной задачи о фильтрационных течениях в трехкомпонентной среде с прямолинейными границами раздела (рис. 3).

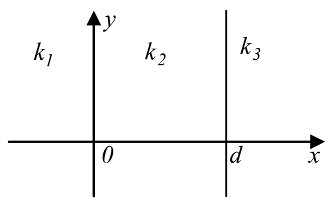

Рис. 3. Трехкомпонентная среда

Считаем, что границами раздела являются прямые $x = 0$ и $x = d$ и течение создается источниками, компактно расположенными в среде 1. Пусть $\Phi_0(z)$ — потенциал течения, которое эти источники образуют в однородной среде. Обозначим $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^+(z)$, $\Phi_2^-(z)$, $\Phi_3(z)$ потенциалы новых течений, появляющихся в результате процессов отражений и прохождений на границах раздела. Из физических соображений ясно, что $\Phi_3(z)$ — потенциал положительного течения в среде k_3 (отрицательные течения там отсутствуют). Тогда уравнения типа (13), которых в данном случае следует выписать для обеих границ раздела, дают следующую систему для неизвестных $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^+(z)$, $\Phi_2^-(z)$, $\Phi_3(z)$:

$$\Phi_1^-(z) = v_1\overline{\Phi_0(s_1 z)} + (1 + v_1)\Phi_2^-(z); \tag{16}$$

$$\Phi_2^+(z) = (1- v_1)\Phi_0(z) - v_1\overline{\Phi_2^-(s_1 z)}; \tag{17}$$

$$\Phi_2^-(z) = v_2\overline{\Phi_2^+(s_2 z)}; \tag{18}$$

$$\Phi_3^+(z) = (1- v_2)\,\Phi_2^+(z), \tag{19}$$

здесь

$$s_1 z = -\overline{z}\,,\ s_2 z = -\overline{z} + 2d, \tag{20}$$

$$v_{21} = v_1,\ w_{21} = 1 - v_1,\ v_{12} = -v_1,\ w_{12} = 1 + v_1,$$

$$v_{32} = v_2,\ w_{32} = 1 - v_2,\ v_{23} = -v_2,\ w_{23} = 1 + v_2, \tag{21}$$

где

$$v_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2},\quad v_2 = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}. \tag{22}$$

Заметим, что формулы (16), (18) и (19) фактически выражают неизвестные функции $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^-(z)$ и $\Phi_3^+(z)$ через известную функцию $\Phi_2^+(z)$. После подстановки выражения (18) в уравнение (17) и учета равенства $s_2 s_1 z = z + 2d$ получаем следующее уравнение для функции $\Phi_2^+(z)$:

$$\Phi_2^+(z) = - v_1 v_2 \Phi_2^+(z + 2d) + (1 - v_1)\Phi_0(z).$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений (итерациями), получаем

$$\Phi_2^+(z) = (1 - v_1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-v_1 v_2)^n\, \Phi_0(z + 2nd). \tag{23}$$

Далее по формулам (16), (18), (19) последовательно находим потенциалы $\Phi_2^-(z)$, $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_3(z)$, а затем $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, при этом учтем равенства (20). Окончательно получаем

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + v_1\overline{\Phi}_0(-z) + v_2(1- v_1^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(-v_1 v_2)^n\, \Phi_0(z + 2(n + 1)d),$$

$$\Phi_2(z) = (1- v_1)\sum_{n=0}^{+\infty}(-v_1 v_2)^n\, (\Phi_0(z + 2nd) + \Phi_0(z + 2(n + 1)d)),$$

$$\Phi_3(z) = (1-v_1)(1-v_2)\sum_{n=0}^{+\infty}(-v_1 v_2)^n\, \Phi_0(z + 2nd).$$

По результатам работы может быть создана новая эффективная методика. Ее ожидаемые преимущества по сравнению с той, которая основана на последовательном применении теоремы о прямой, состоят в рациональности и систематичности.

Предшествующая методика, на наш взгляд, носит эвристический характер и требует значительно большего объема работы. Наша методика позволяет существенно расширить круг решаемых задач, в первую очередь о распространении волн в слоистых средах, а также о прохождении потока микрочастиц через систему потенциальных барьеров и/или ям, популярных в квантовой теории.

Список литературы

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.

2. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М., 1972.

3. *Голубева О.В., Радыгин В.М.* Применения функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М., 1983.

4. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орел, 2006.

5. *Пивень В.Ф.* Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орел, 1994.

6. *Зайцев А.А., Шпилевой А.Я.* Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах : учеб. пособие. Калининград, 2001.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: volyanskaya86@mail

Ирина Константиновна Волянская — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: volyanskaya86@mail

About authors

Dr Anatoly Zaitsev — ass. prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: volyanskaya86@mail

Irina Volyanskaya — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: volyanskaya86@mail